



INSPECTORATUL
ȘCOLAR JUDEȚEAN
TULCEA



INSPECTORATUL
ȘCOLAR
JUDEȚEAN
BACĂU



INSPECTORATUL
ȘCOLAR JUDEȚEAN
TELEORMAN

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ
„LAURENȚIU PANAITOPOL”
EDIȚIA A XV-A

SUBIECTE

Clasa a XI-a

Problema 1. Considerăm șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ definit recurent prin $x_1 = 1$ și $x_{n+1} = x_n + \frac{n^2}{x_n}$ pentru $n \geq 1$. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n^3} \leq \sqrt{\frac{3}{2}x_{n+1}} \leq \sqrt{(n+2)^3}.$$

Problema 2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $AB - BA = A$. Arătați că $A^3 = O_3$.

Problema 3. Fie $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că $f(x^n) \geq f(x)$, oricare ar fi $x \in [1, \infty)$ și $n \in \mathbb{N}$. Arătați că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ există.

Problema 4. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$. Notăm cu $d(A)$ cel mai mare divizor comun al elementelor matricei A . Arătați că, dacă $d(A) = d(A^2) = d(A^3) = 1$, atunci $d(A^k) = 1$ pentru orice $k \geq 1$.

*Fiecare problemă se notează de la 0 la 21 de puncte și 16 puncte sunt din oficiu
Timp de lucru: 4 ore*